Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις – Φυλλάδιο Ασκήσεων 3

Άσκηση 1. *Δείξτε ότι ο τύπος (υπερβολικός, ελλειπτικός, παραβολικός) της εξίσωσης*

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + G(Du, u, x) = 0$$

είναι ανεξάρτητος της αλλαγής μεταβλητών $\widetilde{x} = \widetilde{x}(x)$.
[Υπόδειξη: Δείξτε ότι ισχύει η σχέση

$$\widetilde{A} = JAJ^T, \quad \textit{όπου} \quad A = (a_{ij})_{i,j=0,\dots,n}, \quad \widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ij})_{i,j=0,\dots,n}, \quad J = \frac{\partial(\widetilde{x}_0, \dots, \widetilde{x}_n)}{\partial(x_0, \dots, x_n)}$$

και χρησιμοποιήστε το θεώρημα αδράνειας του Sylvester στη γραμμική άλγεβρα.]

Άσκηση 2. *Έστω η εξίσωση 1ης τάξης*

$$au_t + bu_x = f(u, x, t)$$

και έστω

$$\gamma(s) = (t(s), x(s)) : \qquad \begin{cases} t' = a \\ x' = b \end{cases}$$

οι χαρακτηριστικές καμπύλες. Επαληθεύστε ότι είναι κάθετες στις χαρακτηριστικές διευθύνσεις

$$(\xi_0, \xi_1) : \qquad a\xi_0 + b\xi_1 = 0.$$

Άσκηση 3. *Θεωρούμε την εξίσωση*

$$u_{tt} - 2\sin t\, u_{tx} - \cos^2 t\, u_{xx} - \cos t\, u_x = 0.$$

Δείξτε ότι είναι υπερβολική και γράψτε τη σε κανονική μορφή.

Άσκηση 4. *Γράψτε την παρακάτω διαφορική εξίσωση σε κανονική μορφή:*

$$u_{xx} + (1 + y^2)^2 u_{yy} + 2y(1 + y^2)u_y = 0.$$

Άσκηση 5. *Βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης*

$$9u_{tt} - 6u_{xt} + u_{xx} = xt^2.$$